

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{W_1 t} \\ -e^{W_1 t} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{W_2 t} \\ -e^{W_2 t} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right\} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For ease of calculation, let $a = W_1$, and $b = W_2$ so that

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{at} \\ -e^{at} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{bt} \\ -e^{bt} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right\} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & e^{at} \\ -e^{at} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & e^{bt} \\ -e^{bt} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{at} \\ -e^{at} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1)(1) - (e^{at})(-e^{at})} \begin{bmatrix} 1 & -e^{at} \\ e^{at} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + e^{2at}} \begin{bmatrix} 1 & -e^{at} \\ e^{at} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + e^{2at}} & -\frac{e^{at}}{1 + e^{2at}} \\ \frac{e^{at}}{1 + e^{2at}} & \frac{1}{1 + e^{2at}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{bt} \\ -e^{bt} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1)(1) - (-e^{bt})(e^{bt})} \begin{bmatrix} 1 & -e^{bt} \\ e^{bt} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + e^{2bt}} \begin{bmatrix} 1 & -e^{bt} \\ e^{bt} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + e^{2bt}} & -\frac{e^{bt}}{1 + e^{2bt}} \\ \frac{e^{bt}}{1 + e^{2bt}} & \frac{1}{1 + e^{2bt}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & e^{at} \\ -e^{at} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & e^{bt} \\ -e^{bt} & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{1 + e^{2at}} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{2bt}} \right) + \left(-\frac{e^{at}}{1 + e^{2at}} \right) \left(\frac{e^{bt}}{1 + e^{2bt}} \right) & \left(\frac{1}{1 + e^{2at}} \right) \left(-\frac{e^{bt}}{1 + e^{2bt}} \right) + \left(-\frac{e^{at}}{1 + e^{2at}} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{2bt}} \right) \\ \left(\frac{e^{at}}{1 + e^{2at}} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{2bt}} \right) + \left(\frac{1}{1 + e^{2at}} \right) \left(\frac{e^{bt}}{1 + e^{2bt}} \right) & \left(\frac{e^{at}}{1 + e^{2at}} \right) \left(-\frac{e^{bt}}{1 + e^{2bt}} \right) + \left(\frac{1}{1 + e^{2at}} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{2bt}} \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1 - e^{at}e^{bt}}{(1 + e^{2at})(1 + e^{2bt})} & \frac{-(e^{at} + e^{bt})}{(1 + e^{2at})(1 + e^{2bt})} \\ \frac{e^{at} + e^{bt}}{(1 + e^{2at})(1 + e^{2bt})} & \frac{1 - e^{at}e^{bt}}{(1 + e^{2at})(1 + e^{2bt})} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Now

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & e^{at} \\ -e^{at} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & e^{bt} \\ -e^{bt} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{1 - e^{at}e^{bt}}{(1 + e^{2at})(1 + e^{2bt})} & 0 - \frac{-(e^{at} + e^{bt})}{(1 + e^{2at})(1 + e^{2bt})} \\ 0 - \frac{e^{at} + e^{bt}}{(1 + e^{2at})(1 + e^{2bt})} & 2 - \frac{1 - e^{at}e^{bt}}{(1 + e^{2at})(1 + e^{2bt})} \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{1 - e^{at}e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} & \frac{e^{at} + e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} \\ -\frac{e^{at} + e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} & 2 - \frac{1 - e^{at}e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1) \left(2 - \frac{1 - e^{at}e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} \right) + \frac{e^{at} + e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} \\ (1) \left(-\frac{e^{at} + e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} \right) + (1) \left(2 - \frac{1 - e^{at}e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} \right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + \frac{1 - e^{at}e^{bt} + e^{at} + e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} \\ 2 - \frac{1 - e^{at}e^{bt} - e^{at} - e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1 - e^{at}e^{bt} + e^{at} + e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} - 2 \\ Y_2 = 2 - \frac{1 - e^{at}e^{bt} - e^{at} - e^{bt}}{(1+e^{2at})(1+e^{2bt})} \end{cases}$$

After switching back to $W_1 = a$ and $W_2 = b$, we have

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1 - e^{W_1 t} e^{W_2 t} + e^{W_1 t} + e^{W_2 t}}{(1+e^{2W_1 t})(1+e^{2W_2 t})} - 2 \\ Y_2 = 2 - \frac{1 - e^{W_1 t} e^{W_2 t} - e^{W_1 t} - e^{W_2 t}}{(1+e^{2W_1 t})(1+e^{2W_2 t})} \end{cases}$$