1. a) Cut 3: $0 = i_3 + 0\cdot i_4 + 0\cdot i_7 + 0\cdot i_1 - i_2 + 0\cdot i_5 + i_6$

Cut 4: $0 = 0\cdot i_3 + i_4 + 0\cdot i_7 + i_1 + i_2 + i_5 + 0\cdot i_6$

Cut 7: $0 = 0\cdot i_3 + 0\cdot i_4 + i_7 + i_1 + 0\cdot i_2 + i_5 + i_6$

$$\underline{0}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \\ i_7 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} \qquad \therefore C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tie1: $0 = 0\cdot V_3 - V_4 - V_7 + V_1 + 0\cdot V_2 + 0\cdot V_5 + 0\cdot V_6$

tie2: $0 = 1\cdot V_3 - V_4 + 0\cdot V_7 + 0\cdot V_1 + V_2 + 0\cdot V_5 + 0\cdot V_6$

tie5: $0 = 0\cdot V_3 - V_4 - V_7 + 0\cdot V_1 + 0\cdot V_2 + V_5 + 0\cdot V_6$

tie6: $0 = -V_3 + 0 V_4 - V_7 + 0\cdot V_1 + 0\cdot V_2 + 0\cdot V_5 + V_6$

$$\underline{0}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_7 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} \qquad \therefore T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$C\cdot T^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

the same with the result $C\cdot T^T = 0_{t\times l}$ in class

(c)

	1	2	3	4	5	6	7
I	-1	0	0	0	-1	-1	-1
II	1	1	0	1	1	0	0
III	0	-1	1	0	0	1	0

$$I_{inc} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_{inc}\cdot I_{inc}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

# of trees is 24

Yuqi Zhao

$\because$ $V_{ib} = V_i + i_1 R_1 = V_i + V_1$

$i_2 = C_1 \dfrac{dV_2}{dt} = C_1 S V_2$

$V_4 = L \dfrac{di_4}{dt} = LSi_4$

$i_6 = g_m V_5$, $i_5 = 0$

$V_3 = i_3 R_3$

$V_7 = i_7 R_7$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&C_1S&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&g_m&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&R_3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&LS&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&R_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $V_{ib} = V_i + V_1$, $V_1 = V_{ib} - V_i$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&C_1S&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&g_m&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \\ V_{3b} \\ V_{4b} \\ V_{5b} \\ V_{6b} \\ V_{7b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&C_1S&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&g_m&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&R_3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&LS&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&R_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ i_{b3} \\ i_{b4} \\ i_{b5} \\ i_{b6} \\ i_{b7} \end{pmatrix}$$

plug

$\therefore$ C, T in, $V_b = C^T V_t$, $i_b = T^T i_L$, $C = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0&-1&-1 \\ 0&0&1&1&0&0&-1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0&-1&-1&1&0&0&0 \\ -1&0&0&0&1&0&0 \\ -1&1&0&0&0&1&0 \\ -1&1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&C_1S&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&g_m&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 1&-1&0 \\ 1&-1&-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&R_3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&LS&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&R_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&-1&-1&-1 \\ -1&0&1&1 \\ -1&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&0&0&R_1&R_1&R_1 \\ 0&C_1S&0&1&0&-1&-1 \\ 0&0&1&R_3&0&0&-R_3 \\ 0&1&1&-LS&0&0&0 \\ g_m&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0 \\ 1&-1&-1&0&0&0&-R_7 \end{array}\right) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&C_1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-L&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} SX = \begin{pmatrix} -1&0&0&0&-R_1&-R_1&-R_1 \\ 0&0&0&-1&0&1&1 \\ 0&0&-1&-R_3&0&0&R_3 \\ 0&-1&-1&0&0&0&0 \\ -g_m&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ -1&1&1&0&0&0&R_7 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = [0\;0\;0\;0\;0\;1\;0]\,X$$