EE 610
10/03/07
corrections 10/04/07

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\boxed{L}\\ 0&0&0&\boxed{C}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \boxed{\dot x_4}\\ \dot x_5\\ \boxed{\dot x_6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&T\\ T&-1&-1&1-T&0&0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix} u,$$

$$\Rightarrow E\dot x = Ax + Bu$$

x = semi-state

$$= \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}$$ $x_1, x_2, x_3 = v_C$; $x_4, x_5, x_6 = i_L$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \dot x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&L\\C&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot x_4\\ \dot x_6\end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}0&L\\C&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot x_4\\ \dot x_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&T\\ T&-1&-1&1-T&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}u$$

next exchange x_4 & x_5 columns

$$= \left[\begin{array}{cccc|cc} -1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&T\\ T&-1&-1&0&1-T&0 \end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_5\\x_4\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}u$$

next separate out x_4 & x_6 as one vector

$$= \begin{bmatrix} -1&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&1\\ T&-1&-1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&T\\1-T&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}u$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ \hline 0&0&0&-1\\ -T&+1&+1&0 \end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_5\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 0&0\\ 0&0\\ \hline 0&T\\ 1-T&0 \end{array}\right]\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 1_2\\ \hline 0_2 \end{array}\right]u \quad ; \quad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = u$$

last 2 rows

$$\begin{bmatrix}0&0\\-T&1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0&-1\\+1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&T\\1-T&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + 0_2\cdot u$$

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&-1\\+1&0\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}0&T\\1-T&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&0\\-T&1\end{bmatrix}u\right\}$$

$$= \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&T\\1-T&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\-T&1\end{bmatrix}u$$

$$= \begin{bmatrix}1-T&0\\0&-T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}T&-1\\0&0\end{bmatrix}u$$

note correction of -1 of T on x_6 which carries through to state equations

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1-T&0\\0&-T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\T&-1\\0&0\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}0&L\\C&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_4\\\dot{x}_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}u$$

$$= \begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}u$$

$$= \begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1-T&0\\0&-T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\T&-1\\0&0\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + 0_2 u$$

$$= \begin{bmatrix}T-1&0\\0&-T+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-T&1\\0&0\end{bmatrix}u$$

Now assume C & $L \neq 0$; need $\begin{bmatrix}0&L\\C&0\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{LC}\begin{bmatrix}0&L\\C&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1/C\\1/L&0\end{bmatrix}$

multiply by $\begin{bmatrix}0&1/C\\1/L&0\end{bmatrix}$

$$1_2\begin{bmatrix}\dot{x}_4\\\dot{x}_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1/C\\1/L&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T-1&0\\0&-T+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&1/C\\1/L&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-T&1\\0&0\end{bmatrix}u$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{T+1}{C} \\ \frac{T-1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{T}{L} & 1/L \end{bmatrix} u$$

these are the state-variable equations for the circuit

output will look like $y = C\begin{bmatrix} x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} + Du$

of the form $\quad \underset{st}{\dot{x}} = A\underset{st}{x} + Bu$, $\underset{st}{x}$ = state variables $= \begin{bmatrix} x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}$

$\quad\quad\quad\quad y = C\underset{st}{x} + Du$

Transfer function $\Longrightarrow$ linear time-invariant

for constant A, B, C, D, E

Use Laplace transform $\mathcal{L}[\cdot]$

$$s\underline{1}\,\mathcal{L}[\underset{st}{x}] = s\,\mathcal{L}[\underset{st}{x}] = A\mathcal{L}[\underset{st}{x}] + B\mathcal{L}[u]$$

$$\mathcal{L}[y] = C\mathcal{L}[\underset{st}{x}] + D\mathcal{L}[u]$$

$$(s\underline{1} - A)\mathcal{L}[\underset{st}{x}] = B\mathcal{L}[u] \Longrightarrow \mathcal{L}[\underset{st}{x}] = (s\underline{1} - A)^{-1}B\mathcal{L}[u]$$

$$\mathcal{L}[y] = \underbrace{\left[C(s\underline{1} - A)^{-1}B + D\right]}_{T(s) = D + C(s\underline{1} - A)^{-1}B}\mathcal{L}[u]$$

here $D = T(\infty)$; zeros of $\det(s\underline{1} - A)$ are poles of $T(s)$.